# 模块二 基本不等式

## 第 1 节 基本不等式的常见用法与拼凑技巧（★★☆）

**内容提要**

设 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号. 我们把这一不等式叫做基本（均值）不等式，常用它来求一些代数式的最大、最小值，其运用口诀可简记为“一正、二定、三相等”.

1．一正：$a$，$b$ 均为正数；

2．二定：用基本不等式求最值时应满足和为定值或积为定值. 但需注意，若和或积不为定值，基本不等式仍然是成立的，只是求不出最值；

3．三相等：必须验证等号能取到，上述定值才是最值.

另外，基本不等式还可以推广到 $n$ 元的形式，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数，则 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号. 例如，当 $n=3$ 时，可以得到三个正数 $x_1,x_2,x_3$ 满足 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\ge\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$，取等条件是 $x_1=x_2=x_3$. 用 $n$ 元基本不等式求最值的原理，与二元基本不等式类似，此处不再赘述. 运用基本不等式求最值的难点在于“凑定值”，本节将归纳几类常见的凑“和定”、“积定”的方法.

**典型例题**

**类型Ⅰ：和定求积的最大值的基本方法**



【例 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $2a+b=1$，则 $ab$ 的最大值为_____.

**解析：** $a$，$b$ 均为正数，且已知 $2a$ 与 $b$ 的和为定值，可直接用均值不等式求积的最大值，

由题意，$1=2a+b\ge2\sqrt{2a\cdot b}$，所以 $ab\le\frac{1}{8}$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，

结合 $2a+b=1$ 可得此时 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $ab$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$.

**答案：** $\frac{1}{8}$

【变式】已知 $a>0$，$b>0$，且 $4a+b=1$，则 $\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b$ 的最小值为_____.

**解析：** 由对数运算性质，$\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b=\log_{\frac{1}{2}}(ab)$ ①，

注意到 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，故只需求 $ab$ 的最大值，条件中有和为定值，可用均值不等式求积的最大值，

由题意，$1=4a+b\ge2\sqrt{4a\cdot b}=4\sqrt{ab}$，所以 $ab\le\frac{1}{16}$，当且仅当 $4a=b$ 时取等号，

结合 $4a+b=1$ 可得此时 $a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $(ab)_{\max}=\frac{1}{16}$，结合①知 $(\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b)_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4$.

**答案：** 4

【例 2】（1）若 $-6<m<3$，则 $(3-m)(m+6)$ 的最大值是_____；

（2）若 $-3<m<3$，则 $(3-m)(2m+6)$ 的最大值是_____.

**解析**：（1）$3-m$ 与 $m+6$ 的和为定值，发现这一隐藏特征，就可用不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 来求积的最大值，

$(3-m)(m+6)\le[\frac{(3-m)+(m+6)}{2}]^2=\frac{81}{4}$，当且仅当 $3-m=m+6$，即 $m=-\frac{3}{2}$ 时取等号，

所以 $(3-m)(m+6)$ 的最大值是 $\frac{81}{4}$.

（2）$3-m$ 与 $2m+6$ 的和不再是定值了，但可将后者提公因式 2 到括号外，凑成和为定值，

$(3-m)(2m+6)=2(3-m)(m+3)\le2[\frac{(3-m)+(m+3)}{2}]^2=18$，当且仅当 $3-m=m+3$，即 $m=0$ 时取等号，

所以 $(3-m)(2m+6)$ 的最大值是 18.

**答案**：（1）$\frac{81}{4}$；（2）18

【反思】若条件有和为定值（有时是隐藏的），则可考虑用不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 来求积的最大值；若没有和为定值，则可尝试凑成和为定值，再用上述不等式求积的最大值.

【变式】已知函数 $f(h)=\frac{2}{3}h^2(6-h)$，$h\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$，则 $f(h)$ 的最大值是_____.

**解析**：$h^2(6-h)$ 可看成 $h\cdot h\cdot(6-h)$，三项和不为定值，可乘系数凑定值，用 $abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3$ 求积的最大值，

$f(h)=\frac{1}{3}h\cdot h\cdot(12-2h)\le\frac{1}{3}\cdot[\frac{h+h+(12-2h)}{3}]^3=\frac{64}{3}$，当且仅当 $h=12-2h$，即 $h=4$ 时取等号，所以 $f(h)_{\max}=\frac{64}{3}$.

**答案**：$\frac{64}{3}$

【反思】①本题若改为求 $h\sqrt{6-h}$ 的最大值，又怎么做？可将其化为 $\sqrt{h^2(6-h)}$，再变成 $\sqrt{\frac{1}{2}h\cdot h\cdot(12-2h)}$，就可对 $h\cdot h\cdot(12-2h)$ 这部分用 $abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3$ 来求最大值了；②从例 2 及其变式可以看出，对于和不为定值的两项（或三项）之积，在其中一项上乘个系数使它们的和为定值是常用的凑“和定”的方法.

【例 3】（多选）已知 $10^a=2$，$10^b=5$，则下列选项中正确的有（　　）

（A）$ab>\frac{1}{4}$　　（B）$ab\le\frac{1}{4}$　　（C）$a^2+b^2<\frac{1}{2}$　　（D）$a^2+b^2>\frac{1}{2}$

**解析**：要判断的不等式与 $a$，$b$ 有关，故应分析它们的关系，可由已知条件解出 $a$ 和 $b$ 来看，

$10^a=2\Rightarrow a=\lg 2$，$10^b=5\Rightarrow b=\lg 5$，所以 $a+b=\lg 2+\lg 5=\lg(2\times 5)=1$，

有了和为定值，要判断 A、B 两个选项，直接用基本不等式即可，

因为 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，所以 $1=a+b>2\sqrt{ab}$，从而 $ab<\frac{1}{4}$，故 A 项错误，B 项正确；

选项 C、D 都与 $a^2+b^2$ 有关，前面已经得到了 $a+b=1$，所以配方来看，

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$，由 $ab<\frac{1}{4}$ 可得 $1-2ab>1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $a^2+b^2>\frac{1}{2}$，

故 C 项错误，D 项正确.

答案：BD

【反思】①本题得到的是 $ab<\frac{1}{4}$，没取等号，但 B 项是正确的，因为“小于等于”的意思是“不大于”，这里已得到 $ab<\frac{1}{4}$，当然满足 $ab$ 不大于 $\frac{1}{4}$；② $a^2+b^2$，$a+b$，$ab$ 三者之间可以通过配方结合基本不等式来相互转换.

**类型Ⅱ：积定求和的最小值的基本方法**

【例 4】（1）已知 $a>1$，则 $a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值是_____；

（2）已知 $a>1$，则 $2a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值是_____；



（3）已知 $a>1$，则 $2a+\frac{4a}{a-1}$ 的最小值是_____.

**解析**：（1）积不是定值，要求和的最小值，应想办法凑“积定”，分母是 $a-1$，故在前面的 $a$ 上也减 1，

因为 $a>1$，所以 $a-1>0$，故 $a+\frac{1}{a-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}+1\geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+1=3$，

当且仅当 $a-1=\frac{1}{a-1}$ 时取等号，结合 $a>1$ 可得此时 $a=2$，所以 $a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值为 3.

（2）要求和的最小值，应先凑“积定”，分母是 $a-1$，故把外面的 $a$ 也变成 $a-1$，

因为 $a>1$，所以 $a-1>0$，故 $2a+\frac{1}{a-1}=2(a-1)+\frac{1}{a-1}+2\geq 2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+2=2\sqrt{2}+2$，

当且仅当 $2(a-1)=\frac{1}{a-1}$ 时取等号，结合 $a>1$ 可得此时 $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}+2$.

（3）分子不再是常数，可通过拆部分分式，将其化为常数，按前面两道题的方法处理，

由题意，$2a+\frac{4a}{a-1}=2a+\frac{4(a-1)+4}{a-1}=2a+4+\frac{4}{a-1}=2(a-1)+\frac{4}{a-1}+6\geq 2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+6=4\sqrt{2}+6$，

当且仅当 $2(a-1)=\frac{4}{a-1}$ 时等号成立，结合 $a>1$ 可得此时 $a=\sqrt{2}+1$，所以 $2a+\frac{4a}{a-1}$ 的最小值是 $4\sqrt{2}+6$.

答案：（1）3；（2）$2\sqrt{2}+2$；（3）$4\sqrt{2}+6$

【反思】在求两项之和的最小值时，若这两项之积不是定值，则可以考虑通过变形凑成积为定值，用不等

式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 来求和的最小值.

【变式 1】已知 $2a-b=2$，则 $9^a+\dfrac{1}{3^b}$ 的最小值是_____.

**解析：**要求和的最小值，应寻找积为定值，先看看有无现成的"积定"，$9^a\cdot\dfrac{1}{3^b}=3^{2a}\cdot 3^{-b}=3^{2a-b}=3^2$，有"积定"，故直接用均值不等式求和的最小值即可，

因为 $2a-b=2$，所以 $9^a+\dfrac{1}{3^b}\ge 2\sqrt{9^a\cdot\dfrac{1}{3^b}}=2\sqrt{3^{2a-b}}=2\sqrt{3^2}=6$，当且仅当 $9^a=\dfrac{1}{3^b}$ 时等号成立，

即 $3^{2a}=3^{-b}$，也即 $2a=-b$，结合 $2a-b=2$ 可得此时 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$，所以 $9^a+\dfrac{1}{3^b}$ 的最小值是 6.

**答案：**6

【变式 2】已知 $4x^4+9x^2y^2+2y^4=4$，则 $5x^2+3y^2$ 的最小值为_____.

**解析：**所给等式左侧可分解因式，先分解，由题意，$4x^4+9x^2y^2+2y^4=(4x^2+y^2)(x^2+2y^2)=4$，

注意到 $(4x^2+y^2)+(x^2+2y^2)$ 恰好为求最值的目标，且两项之积为定值，故可用 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 求最小值，

$5x^2+3y^2=(4x^2+y^2)+(x^2+2y^2)\ge 2\sqrt{(4x^2+y^2)(x^2+2y^2)}=4$，取等条件是 $4x^2+y^2=x^2+2y^2$，

结合 $4x^4+9x^2y^2+2y^4=4$ 可得此时 $x^2=\dfrac{2}{7}$，$y^2=\dfrac{6}{7}$，满足题意，所以 $5x^2+3y^2$ 的最小值为 4.



**答案：**4

【反思】有的题目积定隐藏在条件中，需要变形才能发现，上面的变式 1、2 就是如此.

【例 5】已知 $a$，$b$ 都是正数，则 $\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}$ 的最小值是_____.

**解析：**分母结构较复杂，不易看出如何变形求最值，先将分母换元再看，

设 $\begin{cases}x=2a+3b\\ y=3a+2b\end{cases}$，因为 $a$，$b$ 都是正数，所以 $x$，$y$ 也都是正数，且 $a=\dfrac{3y-2x}{5}$，$b=\dfrac{3x-2y}{5}$，

所以 $\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}=\dfrac{3y-2x}{x}+\dfrac{3x-2y}{y}=\dfrac{3y}{x}-2+\dfrac{3x}{y}-2=\dfrac{3y}{x}+\dfrac{3x}{y}-4\ge 2\sqrt{\dfrac{3y}{x}\cdot\dfrac{3x}{y}}-4=2$，

当且仅当 $\dfrac{3y}{x}=\dfrac{3x}{y}$ 时取等号，此时 $y=x$，也即 $a=b$，故 $\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}$ 的最小值是 2.

**答案：**2

【反思】涉及最值问题，当分母较复杂时，可尝试换元法，换元后往往更易观察出形式，换元法在基本不等式中非常的重要.

【变式】$\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值是_____.

解析：分母的根号部分较复杂，尝试将分母换元再看能否凑出积为定值，

令 $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$，则 $x^2=t^2-1$，所以 $\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{(t^2-1)+17}{4t}=\dfrac{t^2+16}{4t}=\dfrac{1}{4}(t+\dfrac{16}{t})\ge\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{t\cdot\dfrac{16}{t}}=2$，

当且仅当 $t=\dfrac{16}{t}$，即 $t=4$ 时等号成立，结合 $t=\sqrt{x^2+1}$ 可得此时 $x=\pm\sqrt{15}$，故 $\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值是 2.

答案：2

【总结】从上面几道题可以看出，用均值不等式求为正数的两项之和的最小值，找到或凑出积为定值是关键，常见的配凑方法有添项、拆项、换元等.

类型Ⅲ：“1”的代换

【例 6】已知 $a+6b=2(a>0,b>0)$，则 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}$ 的最小值为_____.

解析：要求和的最小值，考虑凑积为定值，把 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}$ 看成 $(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 1$，其中 $1=2\times\dfrac{1}{2}$，结合已知的等式，2 又可代换成 $a+6b$，这样展开就有积定了，

因为 $a+6b=2(a>0,b>0)$，所以 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 1=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 2\times\dfrac{1}{2}=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})(a+6b)\times\dfrac{1}{2}$

$=(\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b})(a+6b)=2+\dfrac{12b}{a}+\dfrac{3a}{b}+18=\dfrac{12b}{a}+\dfrac{3a}{b}+20\ge 2\sqrt{\dfrac{12b}{a}\cdot\dfrac{3a}{b}}+20=32$，



取等条件是 $\dfrac{12b}{a}=\dfrac{3a}{b}$，结合 $a+6b=2(a>0,b>0)$ 可得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$，故 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}$ 的最小值为 32.

答案：32

【反思】“已知 $()a+()b=()$，让求 $\dfrac{()}{a}+\dfrac{()}{b}$ 的最小值（括号内可为任意正常数）”这类题，都可像本题这样通过“1”的代换，凑成积为定值. 这是一个基本模型，很多更复杂的题，可通过换元转化成这种模型.

【变式 1】已知 $x$，$y$ 为正实数，且 $x+2y=xy$，则 $x+2y$ 的最小值是_____.

解析：只要在 $x+2y=xy$ 的两端同除以 $xy$，就和上一题类似了，因为 $x+2y=xy$，所以 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=1$，

要求和的最小值，可用“1”的代换凑积为定值，

$x+2y=(x+2y)\cdot 1=(x+2y)(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x})=\dfrac{x}{y}+2+2+\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}+4\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{4y}{x}}+4=8$，

当且仅当 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4y}{x}$ 时取等号，结合 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=1$ 可得此时 $x=4$，$y=2$，所以 $x+2y$ 的最小值是 8.

答案：8

【变式 2】已知 $x$，$y$ 为正实数，且 $x+y=1$，则 $\dfrac{1}{2x+y}+\dfrac{4}{y+2}$ 的最小值为_____.

**解析：** $\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}$与上面例6中的$\frac{4}{a}+\frac{6}{b}$结构挺像，故尝试通过换元化为例6的模型来处理，

令$\begin{cases}2x+y=a\\y+2=b\end{cases}$，则由题意，$a+b=2(x+y)+2=4$，

于是问题即为在$a+b=4$的条件下，求$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值，这是与例6相同的模型，用“1”的代换即可，

所以$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 1=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 4\times\frac{1}{4}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})(a+b)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4)=\frac{1}{4}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5)$

$\geq\frac{1}{4}(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5)=\frac{9}{4}$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$时取等号，此时$b=2a$，结合$a+b=4$可得$\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$，

代入$\begin{cases}2x+y=a\\y+2=b\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$，满足题意，所以$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

**答案：** $\frac{9}{4}$

**【反思】** 遇到分母较复杂、分子为常数的两个分式相加，让求其最小值这类题，可考虑将分母整体换元，看能否转化为例6的模型来处理.



【例7】若$0<a<1$，则$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}$的最小值为_____.

**解析：** 观察发现分母之和为1，故换元后仍可化为例6的模型来处理，

设$\begin{cases}x=a^2\\y=1-a^2\end{cases}$，因为$0<a<1$，所以$0<x<1$，$0<y<1$，且$x+y=1$，

故$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})\cdot 1=(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})(x+y)=2+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+1=\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+3\geq 2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+3=2\sqrt{2}+3$，

取等条件是$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，即$x=\sqrt{2}y$，结合$x+y=1$可得$\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}-1\end{cases}$，故$(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{1-a^2})_{\min}=2\sqrt{2}+3$.

**答案：** $2\sqrt{2}+3$

【变式】若$\frac{1}{4}<a<1$，则$\frac{1}{1-a}+\frac{16a}{4a-1}$的最小值为_____.

**解析：** 分子部分不是常数，但可通过拆项，将其化为常数，便于观察形式，

$\frac{1}{1-a}+\frac{16a}{4a-1}=\frac{1}{1-a}+\frac{16a-4+4}{4a-1}=\frac{1}{1-a}+4+\frac{4}{4a-1}=\frac{1}{1-a}+\frac{4}{4a-1}+4$，

分母和不为定值，但可通过凑系数化为定值，故仍将分母换元，看能否转化为例6的模型，

设$\begin{cases}x=1-a\\y=4a-1\end{cases}$，则$x>0$，$y>0$，消去$a$可得$4x+y=3$，且$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{16a}{4a-1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+4$，

这样又转化成例 6 的模型了，用“1”的代换即可凑出积为定值，

所以$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{16a}{4a-1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+4=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y})\cdot 1+4=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y})\cdot 3\times\dfrac{1}{3}+4=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y})(4x+y)\times\dfrac{1}{3}+4$

$=\dfrac{1}{3}(4+\dfrac{y}{x}+\dfrac{16x}{y}+4)+4=\dfrac{1}{3}(\dfrac{y}{x}+\dfrac{16x}{y})+\dfrac{20}{3}\geq\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{16x}{y}}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{28}{3}$，

当且仅当$\dfrac{y}{x}=\dfrac{16x}{y}$时取等号，结合$4x+y=3$得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{8}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，此时$a=\dfrac{5}{8}$，满足题意，故$(\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{16a}{4a-1})_{\min}=\dfrac{28}{3}$.

**答案：**$\dfrac{28}{3}$

**【反思】**我们更喜欢分子为常数的结构，若不是，可考虑将其化为常数；另外，若分母复杂，可尝试换元.

**强化训练**

1.（2023·福建模拟·★）函数$y=x+\dfrac{1}{x+1}$在$[0,+\infty)$上的最小值是（　　）

（A）$-2$　（B）1　（C）2　（D）3



2.（2023·全国模拟·★）已知$0<x<1$，则$x(4-3x)$的最大值为_____.

3.（★★）设$0<x<2$，则函数$f(x)=x(2-x)^2$的最大值是_____.

4.（★★）已知$x$，$y$均为正数，且$2^{x-6}=(\dfrac{1}{4})^y$，则$xy$的最大值为（　　）

5.（2022·九江模拟·★★）已知$a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$的最小值为_____.

6.（2022 • 连云港模拟 • ★★）已知 $a>0$ ， $b>0$ ， $a+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值为_____.

7.（2023 • 全国模拟 • ★★★）已知 $m>n>0$，且 $m+n=1$，则 $\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}$ 的最小值为_____.

8.（2023 • 湖南株洲模拟 • ★★★）已知 $0<x<1$，若关于 $x$ 的不等式 $\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}<m^2-8m$ 有解，则实数 $m$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$　（B）$(-1,9)$　（C）$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$　（D）$(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$



9.（★★★）已知正实数 $x$，$y$ 满足 $x+y=1$，则 $\log_2 x+\log_4 y$ 的最大值是_____.

10.（2023 • 天津模拟 • ★★★）若 $b>a>1$，且 $3\log_a b+2\log_b a=7$，则 $a^2+\frac{3}{b-1}$ 的最小值为_____.

11.（2022 • 广东湛江二模 • ★★★）若 $a,b\in(0,+\infty)$，且 $\sqrt{a}+\frac{4}{b}=9$，则 $b+\frac{\sqrt{a}}{a}$ 的最小值为_____.